Colles de Maths - semaine 2
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Questions de cours

- **Obligatoire pour tous :** Formules d'addition, de duplication, de factorisation et de linéarisation **sans démonstration**
- Formules de résolution des systèmes 2x2 (formules de Cramer)
- Inégalité triangulaire pour les complexes (sans le cas d'égalité)

Exercice Résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 2 \\ 5x & + & 6y & + & 7z & + & 8t & = & 5 \\ 4x & + & 4y & + & 4z & + & 4t & = & 3. \end{array}\right.$$

Exercice Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système suivant admette au moins une solution :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & b \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & c. \end{array}\right.$$

Exercice Déterminer les solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} xyz & = & 1 \\ xy^2z^4 & = & 2 \\ xy^3z^9 & = & 3. \end{array}\right.$$

Exercice Soit $n \geq 1$. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & ... & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & ... & + & 2x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & ... & + & 3x_n & = & 1 \\ ... & & & & & & & & & & \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_2 & + & ... & + & nx_n & = & 1. \end{array}\right.$$

Exercice Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & + & t & = & \lambda \\ x & + & y & + & \lambda z & + & t & = & \lambda + 1. \end{array}\right.$$

Exercice Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda x & + & \mu y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda\mu y & + & z & = & \mu \\ x & + & \mu y & + & \lambda z & = & 1. \end{array}\right.$$

Exercice (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire) Soit z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si z_1 et z_2 ont le même argument modulo 2π.

Exercice (lunule d'Hippocrate) On identifie le plan muni de son repère orthonormé avec $\mathbb{C}$. Décrire géométriquement et par un dessin l'ensemble des points dont les affixes vérifient $|z| \leq 1$ et $|z+1| \geq \sqrt{2}$.

Exercice Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|.$$

Étudier le cas d'égalité et interpréter l'inégalité en terme de parallélogramme.

Exercice Soit z un complexe de module 1. Calculer $|z-1|^2 + |z+1|^2$ puis interpréter géométriquement.